ΜΑΘΗΜΑ 6

2.3 Μέτρο μιγαδικού

Ασκήσεις Γεωμετρικές

Μια ξεχωριστή ομάδα

Συνευθειακά σημεία

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γεωμετρικές

1.

Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 μαζί με την αρχή Ο συνιστούν ισόπλευρο τρίγωνο, δείξτε ότι $|z_1+z_2|=\sqrt{3}|z_1|$.

Προτεινόμενη λύση

Έστω α η πλευρά του τριγώνου. Τότε $|z_1| = |z_2| = \alpha$ και $|z_1-z_2| = \alpha$.

$|z_1-z_2|=\alpha \Rightarrow |z_1-z_2|^2=\alpha^2$

$$(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=\alpha^2$$

$$z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=\alpha^2$$

$$\alpha^2-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1+\alpha^2=\alpha^2$$

$$\alpha^2=z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1 \quad \textbf{(1)}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|z_1+z_2|=\sqrt{3}|z_1|$

$$|z_1+z_2|^2=3|z_1|^2$$

$$(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=3\alpha^2$$

$$z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2=3\alpha^2$$

$$\alpha^2+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+\alpha^2=3\alpha^2$$

$z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1=\alpha^2$ που ισχύει από την (1)

2.

Για τους $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ δίνεται ότι $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Αποδείξτε ότι

i) $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$

ii) Οι εικόνες των z_1 , z_2 και $z_1 + z_2$ μαζί με την αρχή O συνιστούν ορθογώνιο τρίγωνο

Προτεινόμενη λύση

i)

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \Rightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

$$z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2$$

$$z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$$

$$(z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)$$

$$z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2$$

$$0 = 2z_1\overline{z}_2 + 2z_2\overline{z}_1$$

$0 = z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1$ που ισχύει από την (1)

ii).

Λόγω του (i) η υπόθεση $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ γίνεται $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ **(2)**

Έστω A, B οι εικόνες των z_1 , z_2

Πυθαγόρειο στους μιγαδικούς

(2) $\Rightarrow$ $(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$, άρα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

3.

Αν $z \in \mathbb{C}^*$ με $|z+i| + |z-i| = \sqrt{2}\left(|z|+1\right)$, δείξτε ότι $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2$

Προτεινόμενη λύση

$$|z+i| + |z-i| = \sqrt{2}\left(|z|+1\right) \Rightarrow \left[|z+i|+|z-i|\right]^2 = \left[\sqrt{2}\left(|z|+1\right)\right]^2$$

$$|z+i|^2 + 2\,|z+i|\,|z-i| + |z-i|^2 = 2\left(|z|^2 + 2|z| + 1\right)$$

$$(z+i)(\bar{z}-i) + 2\,|(z+i)(z-i)| + (z-i)(\bar{z}+i) = 2\,|z|^2 + 4|z| + 2$$

$$z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 + 2\,|z^2 - i^2| + z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = 2\,z\bar{z} + 4|z| + 2$$

$$2\,|z^2+1| = 4|z|$$

$$|z^2+1| = 2|z| \qquad \textbf{(1)}$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z^2+1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|z^2+1|}{|z|} = 2$

$|z^2+1| = 2|z|$ που ισχύει από την (1)

4.

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ με $z_1^2 + z_2^2 = 0$. Αποδείξτε ότι

i) $|z_1| = |z_2|$

ii) $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$

iii) οι εικόνες των z_1, z_2 και $z_1 + z_2$ μαζί με την αρχή O συνιστούν τετράγωνο.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$z_1^2 + z_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; z_1^2 = -z_2^2 \;\Rightarrow\; \frac{z_1^2}{z_2^2} = -1 \;\Rightarrow$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = -1 \;\Rightarrow\; \frac{z_1}{z_2} = \pm i \;\Rightarrow\; z_1 = \pm i z_2 \quad \textbf{(1)}$$

$$(1) \;\Rightarrow\; |z_1| = |\pm i z_2| \;\Rightarrow\; |z_1| = |z_2|$$

ii)

Αρκεί να δειχθεί ότι $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$

Λόγω της (1) $|\pm iz_2 + z_2| = |\pm iz_2 - z_2|$

$$|z_2(1 \pm i)| = |z_2(-1 \pm i)|$$

$$|z_2|\,|1 \pm i| = |z_2|\,|-1 \pm i|$$

$|1 \pm i| = |-1 \pm i|$ που ισχύει

iii)

Έστω A_1, A_2 και A οι εικόνες των z_1, z_2 και $z_1 + z_2$ αντίστοιχα.

Επειδή $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, το τετράπλευρο OA_1AA_2 είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή $|\overrightarrow{OA_1}| = |z_1| = |z_2| = |\overrightarrow{OA_2}|$, το OA_1AA_2 γίνεται ρόμβος.

Επειδή $|\overrightarrow{OA}| = |z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{A_1A_2}|$

(ίσες διαγώνιοι), ο ρόμβος γίνεται τετράγωνο

5.

Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$ με $z^2 - \sqrt{2}\,zw + w^2 = 0$ και A, B οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο. Αν O η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι OA = OB.

Προτεινόμενη λύση

Αντί για δύο μιγαδικούς z, w έναν, τον $\frac{z}{w}$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $|z| = |w|$

$$z^2 - \sqrt{2}\,zw + w^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^2 - \sqrt{2}\,\frac{z}{w} + 1 = 0$$

$\Delta = 2 - 4 = -2,$ $$\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}i\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Άρα $\left|\frac{z}{w}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|z|}{|w|} = 1 \Rightarrow |z| = |w|$

6.

Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$ με $2z - w = i\sqrt{3}w$ και A, B οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο. Αν O η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOB είναι ισοπλευρο.

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $|z| = |w|$ και $|z - w| = |w|$

Αντί για δύο μιγαδικούς z, w έναν, τον $\frac{z}{w}$

$$2z - w = i\sqrt{3}w \Rightarrow 2\frac{z}{w} - 1 = i\sqrt{3}$$

$$2\frac{z}{w} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \textbf{(1)}$$

(1) $\Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1$ άρα $|z| = |w|$

Για την ισότητα $|z - w| = |w|$ αρκεί να αποδείξουμε

$$\frac{|z - w|}{|w|} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z - w}{w}\right| = 1$$

$$\left|\frac{z}{w} - 1\right| = 1 \quad \text{(λόγω της (1))}$$

$$\left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} - 1\right| = 1$$

$$\left|\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \quad \text{που ισχύει}$$

7.

Έστω $z_1 , z_2 , z_3 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και εικόνες Α, Β, Γ αντίστοιχα. Τα σημεία Κ,Λ,Μ είναι οι εικόνες των $w_1 = z_2z_3$, $w_2 = z_3z_1$, $w_3 = z_1z_2$ αντίστοιχα. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, να αποδείξετε ότι είναι και το ΚΛΜ.

Προτεινόμενη λύση

Τρίγωνο ΑΒΓ ισόπλευρο $\Rightarrow$ (ΑΒ) = (ΒΓ) = (ΓΑ)

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3| \qquad \textbf{(1)}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|w_2 - w_1| = |w_3 - w_2| = |w_1 - w_3|$

$$|z_3z_1 - z_2z_3| = |z_1z_2 - z_3z_1| = |z_2z_3 - z_1z_2|$$

$$|z_3|\,|z_1 - z_2| = |z_1|\,|z_2 - z_3| = |z_2|\,|z_3 - z_1|$$

που ισχύει από την υπόθεση $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και την (1)

8.

Έστω οι μιγαδικοί z_1 , z_2 με $z_2 \neq 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ και $z_1 + i\sqrt{3}z_2$ συνιστούν ισόπλευρο τρίγωνο.

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$|(z_1 + z_2) - (z_1 - z_2)| = |(z_1 - z_2) - (z_1 + i\sqrt{3}z_2)| = |(z_1 + i\sqrt{3}z_2) - (z_1 + z_2)|$$

$$|z_1 + z_2 - z_1 + z_2)| = |z_1 - z_2 - z_1 - i\sqrt{3}z_2| = |z_1 + i\sqrt{3}z_2 - z_1 - z_2|$$

$$|2z_2| = |-z_2 - i\sqrt{3}z_2| = |i\sqrt{3}z_2 - z_2|$$

$$2|z_2| = |-z_2 - i\sqrt{3}z_2| = |i\sqrt{3}z_2 - z_2|$$

$$2|z_2| = |-z_2(1 + i\sqrt{3})| = |-z_2(1 - i\sqrt{3})|$$

$$2|z_2| = |z_2|\,|1 + i\sqrt{3}| = |z_2|\,|1 - i\sqrt{3}|$$

$$2 = |1 + i\sqrt{3}| = |1 - i\sqrt{3}|$$

που ισχύει αφού $|1 \pm i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

9.

Αν z_1 , $z_2 \in \mathbb{C}^*$ ώστε $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$, να αποδείξετε ότι

i) η αρχή των αξόνων και οι εικόνες των z_1 , z_2 συνιστούν ισόπλευρο τρίγωνο

ii) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3 = -1$

iii) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{19} + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{19} = 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $|z_1| = |z_2|$ και $|z_1 - z_2| = |z_2|$

$$z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \;\Rightarrow\; z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 - \frac{z_1}{z_2} + 1 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad \textbf{(2)} \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \;\Rightarrow\; |z_1| = |z_2|$$

Για την ισότητα $|z_1 - z_2| = |z_2|$, αρκεί να αποδείξουμε

$$\frac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = 1$$

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{z_2}\right| = 1$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right| = 1$$

Είναι $\dfrac{z_1}{z_2} - 1 \overset{(2)}{=} \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} - 1 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow$

$$\left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

ii)

Για τη διευκόλυνσή μας, θέτουμε $\dfrac{z_1}{z_2} = z$

$$(1) \;\Rightarrow\; z^2 - z + 1 = 0 \;\Rightarrow\; z^2 = z - 1 \qquad \textbf{(3)}$$

Από μεγαλύτερους εκθέτες σε μικρότερους

$$z^3 = z^2 z \overset{(3)}{=} (z-1)z = z^2 - z \overset{(3)}{=} z - 1 - z = -1. \quad \text{Άρα} \quad z^3 = -1 \qquad \textbf{(4)}$$

iii)

$z^{19} = z^{3\cdot 6+1} = (z^3)^6 z \overset{(4)}{=} (-1)^6 z = z$, οπότε $\left(\frac{1}{z}\right)^{19} = \frac{1}{z}$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{19} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{19} = z^{19} + \left(\frac{1}{z}\right)^{19} = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z} \overset{(3)}{=} \frac{z-1+1}{z} = \frac{z}{z} = 1$$

10.

Η εξίσωση $\alpha z^2 + 2\beta z + \alpha = 0$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ και $\alpha > \beta$ έχει ρίζες z_1, z_2.

i) Να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2| = 1$

ii) Αν, επί πλέον είναι $|z_1 + z_2| = \frac{|z_1| + |z_2|}{2}$, να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2.

Προτεινόμενη λύση

i)

$\Delta = 4\beta^2 - 4\alpha^2 = 4(\beta^2 - \alpha^2) < 0$, άρα

οι ρίζες z_1, z_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί $\Rightarrow z_2 = \overline{z_1}$

$\Rightarrow |z_2| = |\overline{z_1}| = |z_1|$ **(1)**

αλλά $z_1 z_2 = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow |z_1 z_2| = 1$

$|z_1|\,|z_2| = 1$

$|z_1|^2 = 1 \Rightarrow |z_1| = 1 \overset{(1)}{=} |z_2|$

ii)

$|z_1 + z_2| = \frac{|z_1| + |z_2|}{2} \Rightarrow 2|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$|z_1 + z_2| = 1 + 1$

$\left|-\frac{2\beta}{\alpha}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|2\beta|}{|\alpha|} = 1 \Rightarrow 2\beta = \alpha$

Η εξίσωση γίνεται $\alpha z^2 + \alpha z + \alpha = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$, $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Μια ξεχωριστή ομάδα

11.

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξτε ότι

$$|\, z_1 + z_2 + z_3 \,| = |\, z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 \,|$$

Προτεινόμενη λύση

$|z_1| = 1 \quad \Rightarrow \quad |z_1|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1\,\overline{z}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ και ομοίως για τους $\overline{z}_2$, $\overline{z}_3$

$$\begin{aligned} |\, z_1 + z_2 + z_3 \,| &= |\, \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3 \,| \\ &= \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| \\ &= \left|\frac{z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right| \\ &= \frac{|z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|} \;=\; |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| \end{aligned}$$

12.

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

Να αποδείξτε ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad & z_1 = -(\,z_2 + z_3\,) \\ & z_1^2 = (\,z_2 + z_3\,)^2 \\ & z_1^2 = z_2^2 + 2\,z_2z_3 + z_3^2 \qquad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Αλλά $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_2^2 + z_3^2 = -\, z_1^2$

$$\begin{aligned} (1) \quad \Rightarrow \quad z_1^2 = -z_1^2 + 2\,z_2z_3 \quad \Rightarrow \quad & 2\,z_1^2 = 2\,z_2z_3 \\ & z_1^2 = z_2z_3 \\ & z_1^3 = z_1\,z_2z_3 \qquad |z_1|^3 = |z_1z_2z_3| \end{aligned}$$

και κυκλικά $|z_2|^3 = |z_1z_2z_3|$, $\quad |z_3|^3 = |z_1z_2z_3|$

Άρα $|z_1|^3 = |z_2|^3 = |z_3|^3 \quad \Rightarrow \quad |z_1| = |z_2| = |z_3|$

13.

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Να αποδείξετε ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

Προτεινόμενη λύση

$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow -z_2 = z_1 + z_3$

Η ισότητα $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Rightarrow$

$$|z_1 + z_1 + z_3| = |z_3 - z_1|$$

$$|2z_1 + z_3| = |z_3 - z_1|$$

$$|2z_1 + z_3|^2 = |z_3 - z_1|^2$$

$$(2z_1 + z_3)(2\overline{z}_1 + \overline{z}_3) = (z_3 - z_1)(\overline{z}_3 - \overline{z}_1)$$

$$4z_1\overline{z}_1 + 2z_1\overline{z}_3 + z_3 2\overline{z}_1 + z_3\overline{z}_3 = z_3\overline{z}_3 - z_3\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_3 + z_1\overline{z}_1$$

$$3|z_1|^2 + 3z_1\overline{z}_3 + 3z_3\overline{z}_1 = 0 \Rightarrow |z_1|^2 + z_1\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_2 = -z_1 - z_3$

Η ισότητα $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| \Rightarrow |-z_1 - z_3 - z_3| = |z_3 - z_1|$

$$|z_1 + 2z_3| = |z_3 - z_1|$$

$$|z_1 + 2z_3|^2 = |z_3 - z_1|^2$$

$$(z_1 + 2z_3)(\overline{z}_1 + 2\overline{z}_3) = (z_3 - z_1)(\overline{z}_3 - \overline{z}_1)$$

………………………………………

………………………………………

$$|z_3|^2 + z_1\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1 = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Από τις (1), (2) έχουμε $|z_1|^2 = |z_3|^2 \Rightarrow |z_1| = |z_3|$ και ομοίως $= |z_2|$

14.

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Να αποδείξετε ότι

i) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$

ii) $z_3^2 = z_1z_2$

iii) Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho \Rightarrow |z_1|^2 = \rho^2$

$$z_1 \overline{z}_1 = \rho^2$$

$$\overline{z}_1 = \frac{\rho^2}{z_1} \text{ και ομοίως για τους } \overline{z}_2, \ \overline{z}_3$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3 = 0$$

$$\frac{\rho^2}{z_1} + \frac{\rho^2}{z_2} + \frac{\rho^2}{z_3} = 0$$

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0 \Rightarrow z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$$

ii)

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0 \Rightarrow z_1z_2 = -z_2z_3 - z_3z_1$$

$$z_1z_2 = -z_3(z_1 + z_2) \quad \text{αλλά} \quad z_1 + z_2 = -z_3$$

$$\text{άρα} \quad z_1z_2 = -z_3(-z_3) \Rightarrow z_1z_2 = z_3^2$$

iii)

Θα εκφράσουμε το μήκος της πλευράς του τριγώνου συναρτήσει του ρ.

$$|z_2 - z_1|^2 = (z_2 - z_1)(\overline{z}_2 - \overline{z}_1) = (z_2 - z_1)\left(\frac{\rho^2}{z_2} - \frac{\rho^2}{z_1}\right)$$

$$= (z_2 - z_1)\,\rho^2\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}\right)$$

$$= \rho^2\left(1 - \frac{z_2}{z_1} - \frac{z_1}{z_2} + 1\right)$$

$$= \rho^2\left(2 - \frac{z_2^2 + z_1^2}{z_1z_2}\right)$$

$$\overset{(ii)}{=} \rho^2\left(2 - \frac{z_1z_3 + z_2z_3}{z_1z_2}\right)$$

$$= \rho^2\left(2 - \frac{z_3(z_1 + z_2)}{z_1z_2}\right)$$

$$= \rho^2\left(2 - \frac{z_3(-z_3)}{z_1 z_2}\right)$$

$$= \rho^2\left(2 + \frac{z_3^2}{z_1 z_2}\right)$$

$$= \rho^2\left(2 + \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2}\right) = \rho^2(2+1) = 3\rho^2$$

Άρα $|z_2 - z_1| = \rho\sqrt{3}$ και κυκλικά $= |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$

15.

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι

i) $z_3^2 = z_1 z_2$

ii) $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

iii) οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

Προτεινόμενη λύση

i)

$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_3 = -(z_1 + z_2)$

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + (z_1 + z_2)^2 = 0$

$z_1^2 + z_2^2 + z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 = 0$

$2z_1^2 + 2z_2^2 + 2z_1z_2 = 0$

$z_1^2 + z_2^2 + z_1z_2 = 0$ αλλά $z_1^2 + z_2^2 = -z_3^2$ οπότε

$-z_3^2 + z_1z_2 = 0$

$z_3^2 = z_1z_2$

ii)

$z_3^2 = z_1z_2 \Rightarrow z_3^3 = z_1z_2z_3 \Rightarrow |z_3^3| = |z_1z_2z_3|$ και κυκλικά $= |z_2^3| = |z_1^3|$

Άρα $|z_1|^3 = |z_2|^3 = |z_3|^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = |z_3|$

iii)

Βλέπε το (iii) της άσκησης 4.

16.

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$ και $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \rho\sqrt{3}$.

Να αποδείξετε ότι $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Προτεινόμενη λύση

$$|z_1 - z_2| = \rho\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |z_1 - z_2|^2 = 3\rho^2$$

$$(z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 3\rho^2$$

$$|z_1|^2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2 = 3\rho^2$$

$$z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 = -\rho^2$$

Ομοίως , κυκλικά θα έχουμε $z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_2 = -\rho^2$ και $z_3\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_3 = -\rho^2$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|z_1 + z_1 + z_3| = 0$ ή ότι

$$|z_1 + z_1 + z_3|^2 = 0$$

Είναι $|z_1 + z_1 + z_3|^2 = (z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3)$

$$= |z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_3 + z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1 + z_3\overline{z}_2 + |z_3|^2$$

$$= 3\rho^2 - \rho^2 - \rho^2 - \rho^2 = 0$$

17.

Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ώστε να ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $|z_1 + z_2 + z_3| = 3$. Να αποδείξετε ότι $z_1 = z_2 = z_3$

Προτεινόμενη λύση

Θα αποδείξουμε ότι $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 0$

$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = |z_1|^2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2 = 2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1$

$|z_2 - z_3|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2 - z_2\overline{z}_3 - z_3\overline{z}_2$

$|z_3 - z_1|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2 - z_3\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_3$

Άρα

$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 6 - (z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_2 + z_3\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_3)$ **(1)**

$|z_1 + z_2 + z_3| = 3 \quad \Rightarrow$

$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 9$

$(z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3) = 9$

$z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_3 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1 + z_3\overline{z}_2 + z_3\overline{z}_3 = 9$

$|z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_3 + z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1 + z_3\overline{z}_2 + |z_3|^2 = 9$

$z_1\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_3 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_3 + z_3\overline{z}_1 + z_3\overline{z}_2 = 9 - 1 - 1 - 1 = 6$

(1) $\Rightarrow \quad |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 6 - 6 = 0 \quad \Rightarrow$

$|z_1 - z_2|^2 = 0$ και $|z_2 - z_3|^2 = 0$ και $|z_3 - z_1|^2 = 0$

$|z_1 - z_2| = 0$ και $|z_2 - z_3| = 0$ και $|z_3 - z_1| = 0$

$z_1 - z_2 = 0$ και $z_2 - z_3 = 0$ και $z_3 - z_1 = 0$

$z_1 = z_2$ και $z_2 = z_3$ και $z_3 = z_1$

18.

Για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 δίνονται

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$
$$z_1 + z_2 + z_3 = 1$$
$$z_1 z_2 z_3 = 1$$

i) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = 1$

ii) Να υπολογίσετε τους z_1, z_2, z_3.

Προτεινόμενη λύση

i)

$|z_1| = 1 \;\Rightarrow\; |z_1|^2 = 1 \;\Rightarrow\; z_1\,\overline{z}_1 = 1 \;\Rightarrow\; \overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ και ομοίως για τους $\overline{z}_2$, $\overline{z}_3$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1 \;\Rightarrow\; \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3 = 1$$
$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$$

ii)

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1 \;\Rightarrow\; z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1\, z_2z_3 = 1$$
$$z_1(z_2 + z_3) + z_2z_3 = 1 \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $\quad z_1 + z_2 + z_3 = 1 \;\Rightarrow\; z_2 + z_3 = 1 - z_1$

και $\quad z_1z_2z_3 = 1 \;\Rightarrow\; z_2z_3 = \dfrac{1}{z_1}$

$$(1) \;\Rightarrow\; z_1\,(1 - z_1) + \frac{1}{z_1} = 1 \;\Rightarrow\; z_1^2\,(1 - z_1) + 1 = z_1$$
$$z_1^2 - z_1^3 + 1 - z_1 = 0$$
$$z_1^2\,(1 - z_1) + (1 - z_1) = 0$$
$$(1 - z_1)(z_1^2 + 1) = 0$$
$$1 - z_1 = 0 \quad ή \quad z_1^2 + 1 = 0$$
$$z_1 = 1 \quad ή \quad z_1^2 = -1$$
$$z_1 = 1 \quad ή \quad z_1 = i \quad ή \quad z_1 = -i$$

Ομοίως για τους z_2 , z_3

Οι συνδυασμοί που επαληθεύουν τις δοσμένες ισότητες είναι :

α) $\quad z_1 = z_2 = z_3 = 1$

β) $\quad$ ένας από τους αγνώστους $= 1$, ένας $= i$ και ένας $= -i$

Συνευθειακά σημεία

19.

Μια πρόταση σαν θεώρημα : Αν A, B είναι οι εικόνες των $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ και O η αρχή των αξόνων, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$$

O, A, B συνευθειακά.

Απόδειξη

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$

$$\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$z_1 = \lambda z_2$$

$$x_1 + y_1 i = \lambda(x_2 + y_2 i)$$

$$x_1 = \lambda x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = \lambda y_2$$

$$(x_1, y_1) = (\lambda x_2, \lambda y_2)$$

$$(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$$

$$\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \text{O, A, B συνευθειακά}$$

20.

Μια πρόταση σαν θεώρημα : Αν A, B είναι οι εικόνες των $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ και O η αρχή των αξόνων, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\frac{z_1}{z_2} \text{ φανταστικός } \neq 0 \iff \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$$

Απόδειξη

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$

$$\frac{z_1}{z_2} \text{ φανταστικός } \neq 0 \iff \frac{z_1}{z_2} = \lambda i, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$z_1 = \lambda i z_2$$

$$x_1 + y_1 i = \lambda i(x_2 + y_2 i)$$

$$x_1 + y_1 i = \lambda i x_2 - \lambda y_2$$

$$x_1 = -\lambda y_2 \text{ και } y_1 = \lambda x_2 \quad \textbf{(1)}$$

- Όταν $y_2 \neq 0$, η (1) $\iff -\dfrac{x_1}{y_2} = \lambda$ και $y_1 = -\dfrac{x_1}{y_2} x_2$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$$

- Όταν $y_2 = 0$, η (1) $\iff x_1 = -\lambda \cdot 0$ και $y_1 = \lambda x_2$

$$x_1 = 0 \text{ και } y_1 = \lambda x_2$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \cdot x_2 + y_1 \cdot 0$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \iff \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$$

21.

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ με $z_1^2 + z_1 z_2 - z_2^2 = 0$. Αποδείξτε ότι, οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

Προτεινόμενη λύση

Έστω A, B οι εικόνες των z_1, z_2 και O η αρχή των αξόνων.

$$z_1^2 + z_1 z_2 - z_2^2 = 0 \iff \frac{z_1^2}{z_2^2} + \frac{z_1 z_2}{z_2^2} - \frac{z_2^2}{z_2^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^* \iff \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \frac{z_1}{z_2} - 1 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$. Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες,

άρα $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \Rightarrow O, A, B$ συνευθειακά

22.

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ με $3z_1^2 + 5z_2^2 = -4z_1 z_2$. Αποδείξτε ότι, οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 21.

23.

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ και $\dfrac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2 μαζί με την αρχή των αξόνων συνιστούν ισοσκελές τρίγωνο ή είναι συνευθειακά σημεία.

Προτεινόμενη λύση

$$\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(z_1 + z_2)^2 = \lambda z_1 z_2$$

$$z_1^2 + 2 z_1 z_2 + z_2^2 - \lambda z_1 z_2 = 0$$

$$z_1^2 + (2-\lambda) z_1 z_2 + z_2^2 = 0$$

$$\frac{z_1^2}{z_2^2} + (2-\lambda)\frac{z_1 z_2}{z_2^2} + \frac{z_2^2}{z_2^2} = 0$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + (2-\lambda)\frac{z_1}{z_2} + 1 = 0 \qquad \textbf{(1)} \qquad \Delta = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}}$$

- Όταν $\Delta = 0$ τότε $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{\lambda - 2}{2}$

  α) για $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow z_1 = 0$ άτοπο, άρα $\lambda \neq 2$

  β) για $\lambda \neq 2 \Rightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\lambda - 2}{2} \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ O, A, B συνευθειακά

- Όταν $\Delta > 0$ τότε η (1) έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή

  $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ O, A, B συνευθειακά

- Όταν $\Delta < 0$ τότε η (1) $\Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\lambda - 2 \pm i\sqrt{4\lambda - \lambda^2}}{2}$

  Άρα $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\lambda-2)^2 + 4\lambda - \lambda^2}$

  $= \dfrac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda - \lambda^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

  Άρα $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \Rightarrow (OA) = (OB)$

24.

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+^*$. (οι διανυσματικές ακτίνες ομόρροπα διανύσματα).

Προτεινόμενη λύση

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \frac{|z_1 + z_2|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} + 1$$

$$\left|\frac{z_1 + z_2}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + 1$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2} + 1\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Θέτουμε $\dfrac{z_1}{z_2} = z$, η (1) $\iff$ $|z+1| = |z| + 1$

$$|z+1|^2 = (|z|+1)^2$$

$$(z + 1)(\overline{z} + 1) = |z|^2 + 2|z| + 1$$

$$z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = |z|^2 + 2|z| + 1$$

$$z + \overline{z} = 2|z| \qquad \textbf{(2)}$$

Θέτουμε $z = x + yi$, η (2) $\iff$ $2x = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

$$x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$x > 0$ και $x^2 = x^2 + y^2$

$x > 0$ και $0 = y^2$

$x > 0$ και $y = 0$

$z = x > 0$

$z \in \mathbb{R}_+^*$